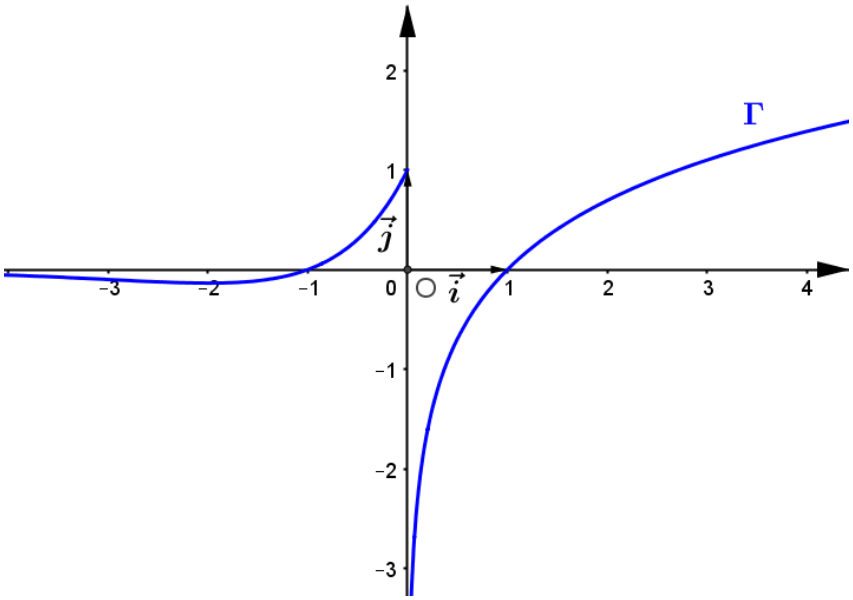
EXERCICE N°6 : | **50'** | **7 points**

La courbe Γ ci-dessous représente la fonction dérivée seconde de f'' d'une fonction f deux fois dérivable sur IR^*.

On sait que $f(0)=0$ et on désigne par C la courbe représentative de la fonction f.



1°) Par lecture graphique déterminer :

a) Le signe de f''.

b) Les points d'inflexion de C_f

2°) La fonction f' est définie sur IR par :

$$\begin{cases} f'(x)=xe^x & si\ x\le 0 \\ f'(x)=x\ln x-x & si\ x>0 \end{cases}$$

a) Montrer que f' est continue en 0.

b) Sans expliciter $f''(x)$, dresser le tableau de variation de f'

3°) Soit g la restriction de f' sur $[1;+\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Etudier la position relative de C_g avec la droite $\Delta : y=x$

c) Tracer C_g et $C_{g^{-1}}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

4°) Soit u la suite définie sur IN par : $\begin{cases} u_0=0,5 \\ u_{n+1}=g^{-1}(u_n), \text{ pour tout } n\in IN \end{cases}$.

a) Montrer que pour tout $n\in IN$ on a : $0,5\le u_n\le e^2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

5°) a) Montrer que la fonction : $H : x\mapsto \frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{3}{4}x^2$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction :

$x\mapsto x\ln x-x$

b) Soit la fonction F définie sur IR par : $F(x)=\int_0^x te^t dt$.

Montrer que pour tout $x\in IR$, $F(x)=(x-1)e^x+1$. En déduire l'expression explicite de f sur IR.

c) Dresser le tableau de variation de f et étudier les branche infinies de C_f.

d) Tracer C_f et ses tangentes en leurs points d'inflexion dans un nouveau repère.

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn